

LAHENDUSED 12.KLASS

1. Vastus: $x = y = 2\sqrt{3}$ või $x = y = -2\sqrt{3}$

Lahendus:

Teisendame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + 12 \\ x^3y + 4xy - 12x^2 = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = -xy + 12 \\ xy(x^2 + 4) - 12(x^2 + 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - y)^2 = -xy + 12 \\ (x^2 + 4)(xy - 12) = 0 \end{cases}$$

Vaatame teist võrrandit: $(x^2 + 4)(xy - 12) = 0$. Teame, et korrutis võrdub 0-ga parajasti siis kui üks teguritest võrdub 0-ga. Samas $x^2 + 4 \neq 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral, seega järelilikult $xy - 12 = 0$.

Vaatame esimest võrrandit: $(x - y)^2 = -xy + 12 = 0$. Seega $x - y = 0$ ehk $x = y$.

Nüüd teame, et $xy - 12 = 0$ ja $x = y$, millest $x = \pm 2\sqrt{3}$

Vastus. $x = y = 2\sqrt{3}$ või $x = y = -2\sqrt{3}$

Hindamine.

Esimese võrrandi teisendamine kujule $(x - y)^2 = -xy + 12$ 2p

Teise võrrandi teisendamine kujule $(x^2 + 4)(xy - 12) = 0$ 1p

Märkamine, et teises võrrandis peab üks teguritest võrduma 0-ga 1p

Järeldatud, et $xy - 12 = 0$ 1p

Järeldatud, et $x = y$ 1p

Leitud õige vastus 1p

7p

Ainult õige vastuse eest anda 2p.

2. Vastus: 1525104.

Lahendus:

Näitame, et jaded a_1, a_3, a_5, \dots ja a_2, a_4, a_6, \dots on mõlemad aritmeetilised jaded vahega 1,5.

Selleks tõestame induksiooniga, et iga naturaalarvulise n korral $a_{n+2} - a_n = 1,5$

Baas: Kui $n = 1$, siis $a_3 - a_1 = 1,5 - 0 = 1,5$. Tingimus on täidetud.

Nüüd eeldame, et $n = k$ korral on tingimus täidetud, ehk

$$a_{k+2} - a_k = 1,5$$

Ja tõestame, et sel juhul tingimus on täidetud ka $n = k + 1$ korral.

Kui $n = k + 1$. Siis

$$a_{k+3} - a_{k+1} = a_{k+2} + a_{k+1} - a_k - a_{k+1} = a_{k+2} - a_k = 1,5$$

Seega induksiooni põhjal on iga naturaalarvulise n korral $a_{n+2} - a_n = 1,5$ ehk jaded a_1, a_3, a_5, \dots ja a_2, a_4, a_6, \dots on tõepoolest aritmeetilised jaded vahega 1,5.

Leiame nüüd jada a_1, a_3, a_5, \dots esimese $\frac{2017+1}{2} = 1009$ liikme summa aritmeetilise jada summa valemist:

$$1009 * 0 + \frac{1008 \cdot 1009 \cdot 1,5}{2} = 762804$$

Leiame jada a_2, a_4, a_6, \dots esimese $\frac{2017-1}{2} = 1008$ liikme summa:

$$1008 * 1 + \frac{1007 \cdot 1008 \cdot 1,5}{2} = 762300$$

Seega algse rea esimese 2017 liikme summa on $762804 + 762300 = 1525104$

Hindamine:

Märgatud, et jaded a_1, a_3, a_5, \dots ja a_2, a_4, a_6, \dots on aritmeetilised jaded vahega 1.5 1p

Tõestatud, et jaded a_1, a_3, a_5, \dots ja a_2, a_4, a_6, \dots on aritmeetilised jaded vahega 1.5 3p

Leitud jada a_1, a_3, a_5, \dots esimese 1009 liikme summa: 1p

Leitud jada a_2, a_4, a_6, \dots esimese 1008 liikme summa: 1p

Leitud lõppvastus: 1p

7p

3. Vastus: $x = 3, y = 3$

Lahendus:

$$2^x + 1 = y^2$$

$$2^x = y^2 - 1$$

$$2^x = (y - 1)(y + 1)$$

Järelikult $2^x \div (y - 1)$ ning $2^x \div (y + 1)$. Märkame, et $y \neq 1$, sest $2^x > 0$.

Seega, eksisteerivad sellised arvud m ja n , et $2^m = (y - 1)$ ning $2^n = (y + 1)$, kusjuures $m < n$ ning $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Siis

$$2^n - 2^m = y + 1 - y + 1 = 2$$

$$2^m(2^{n-m} - 1) = 2$$

ning

$$n = m + 1.$$

Saame $2^m(2 - 1) = 2$, seega $2^m = 2$, millest $m = 1$ ning $n = 1 + 1 = 2$.

Siis $\begin{cases} y - 1 = 2 \\ y + 1 = 4 \end{cases}$, millest $y = 3$.

Seega

$$2^x = 9 - 1$$

ning

$$x = 3.$$

Hindamine:

Võrduse $2^x = (y - 1)(y + 1)$ koostamine 1p

Märkamine, et $2^x \div (y - 1)$ ning $2^x \div (y + 1)$ 1p

Märkamine, et eksisteerivad sellised arvud $m, n \in \mathbb{Z}^+$, et

$2^m = (y - 1)$ ning $2^n = (y + 1)$ 1p

n ja m väärtuste leidmine 2p

x ja y väärtuste leidmine 2p

7p

$$4. \text{ Vastus: } \sin \gamma = \frac{c}{2R}, \tan \alpha = \frac{\frac{a \cdot c}{b \cdot 2R}}{1 - \frac{a \cdot \sqrt{4R^2 - c^2}}{b \cdot 2R}}, \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma.$$

Lahendus:

Olgu $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, siis on $AB = c$,

$AC = bt$, $BC = at$, kus $t > 0$.

$\angle AOB = 2 \cdot \angle ACB$ (samale kaarele toetuvad kesknurk ja piirdenurk).

OF on kolmnurga AOB kõrgus, ning kuna kolmnurk AOB on võrdhaarne, siis OF on ka nurgapoolitaja, ehk $\angle AOF = \gamma$

$$\Delta AOF: \angle AOF = \gamma, \text{ siis } \sin \gamma = \frac{AF}{AO} = \frac{\frac{c}{2}}{R} = \frac{c}{2R}.$$

Nurk C on määratud.

BD on kolmnurga ABC kõrgus.

$$\Delta BDC: \sin \gamma = \frac{BD}{at}, \text{ millest } BD = at \cdot \sin \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{CD}{at}, \text{ millest } CD = at \cdot \cos \gamma$$

$$\Delta AOF: \cos \gamma = \frac{OF}{R}, OF = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2},$$

$$\text{millest } \cos \gamma = \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}.$$

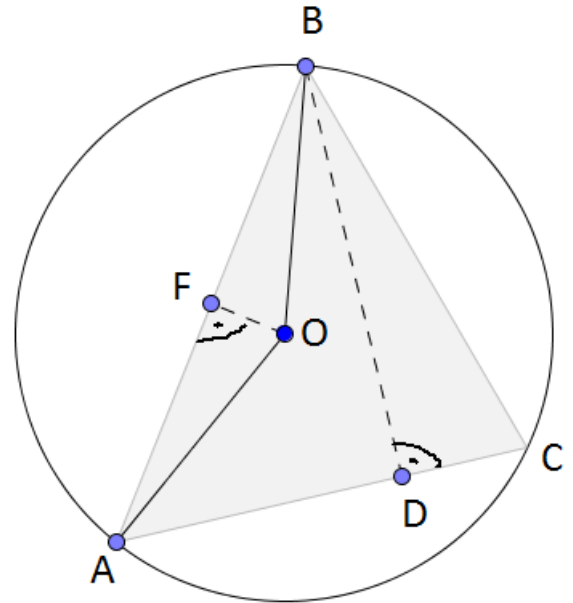
$$\text{Seega } CD = at \cdot \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}.$$

$$\Delta ABD: \tan \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{at \cdot \sin \gamma}{bt - at \cdot \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}} = \frac{\frac{a \cdot c}{b \cdot 2R}}{1 - \frac{a \cdot \sqrt{4R^2 - c^2}}{b \cdot 2R}}.$$

Nurk A on määratud.

Kuna nurgad α ja γ on määratud, siis

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma.$$



Hindamine:

Põhjendamine, et $\sphericalangle AOF = \gamma$	1p
$\sin\gamma$ avaldamine R ja c kaudu	1p
$\cos\gamma$ avaldamine R ja c kaudu	1p
$\tan\alpha$ avaldamine R ja c kaudu	3p
β avaldamine	<u>1p</u>
	7p

5. Vastus: võidab Kristjan.

Lahendus:

Teine mängija saab alati võtta nii palju münte kotist, et tema ja eelmise käiguga võetud müntide arv oleks kokku kas 18, 20 või 22:

Kui esimene mängija võtab 7 münti, siis teine võtab 11 või 13

Kui esimene mängija võtab 11 münti, siis teine võtab 7 või 11

Kui esimene mängija võtab 13 münti, siis teine võtab 7.

Juhul, kui esimene mängija võtab 7 või 13 münti, siis teine saab alati võtta vastavalt 13 ja 7 münti, et kokku oleks 20.

Kui esimene mängija võtab 11, siis teine saab alati võtta 7 või 11, et summa oleks kas 18 või 22.

Samas, kui esimene mängija võtab 11 mitu korda, siis teine mängija saab vaheldumisi võtta 7 ja 11, et summa oleks vaheldumisi 18 ja 22.

See tekitab olukorda, kus teine mängija saab alati hoida väljavõetud müntide arvu kas

20k või $(20k \mp 2)$.

Kui kasutada seda strateegiat, siis lõpuks jääb kas 17, 19 või 15 münti ehk 2.mängija ei saa võita seda strateegiat kasutades.

Siit võime järeldada, et kui Kristjan alustab mängu ja võtab esimesena ära 13 münti, jättes kotis 2004 münti ja kasutab edaspidi ülal kirjeldatud strateegiat, siis tema ka võidab, kuna lõpus jääb kas 2, 4 või 6 münti, mis on vähem kui 7.

Hindamine:

Märkimine, et kui esimene mängija võtab 7 või 13 münti, siis teisel on alati võimalik võtta nii palju münte, et koos eelneva käiguga oleks kokku 20 1p

Näitamine, et 11 puhul saab võtta nii palju münte, et kokku oleks kas 18 või 22 1p

Näitamine, et sellisel juhul väljavõetud müntide arv peale teise mängija käiku on alati kas 20k või $(20k \mp 2)$ 3p

Selgitamine, et võidu jaoks on vaja Kristjanil esimese käiguga võtta 13 münti ja mängida ülevaltoodud strateegia järgi 2p

7p

Ainult õige vastus – Op.